

25/2/19

▷ Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $y \in A''$.

Θα λέμε ότι το στοιχείο $l \in \mathbb{R}^*$ είναι το όριο της f στο y (συμβ. $\lim_{x \rightarrow y} f(x) = l$) εάν ισχύουν τα εξής:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \in B(l, \varepsilon)$$

• Ανώτερο όριο της $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ στο $y \in A''$
(συμβ. $\limsup_{x \rightarrow y} f(x)$ ή $\overline{\lim}_{x \rightarrow y} f(x)$) ορίζεται να είναι:

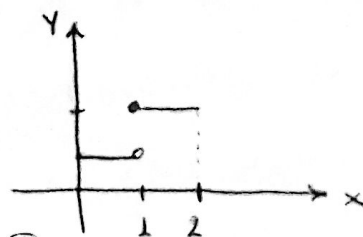
$$\inf_{\delta > 0} \sup \{ f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \} = \limsup_{x \rightarrow y} f(x)$$

• Κατώτερο όριο της $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ στο $y \in A''$
(συμβ. $\liminf_{x \rightarrow y} f(x)$ ή $\underline{\lim}_{x \rightarrow y} f(x)$)

$$\sup_{\delta > 0} \inf \{ f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \} = \liminf_{x \rightarrow y} f(x)$$

Παράδειγμα

$$f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1) \\ 2 & x \in [1, 2] \end{cases}$$



Έστω $\delta > 0$ τότε $\sup \{ f(x) : x \in B_0(1, \delta) \cap A \} \geq 2$ με δακτυλική περιοχή $B_0(1, \delta)$
 $\inf_{\delta > 0} \sup \{ f(x) : x \in B_0(1, \delta) \cap A \} = 2$ άρα $\limsup_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

ομοίως $\inf \{ f(x) : x \in B_0(1, \delta) \cap A \} = 1$ εφόσον ισχύουν για την
 δακτυλική περιοχή $\sup \inf \{ f(x) : x \in B_0(1, \delta) \cap A \} = 1$: $\liminf_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

⑤

Παράδειγμα

$$\text{Έστω } f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

εάν $y \in [0,1]$ και έστω $\delta > 0$ και δατυνθική περλοχή

$$B_0(y, \delta) \cap A \quad \text{τότε } \inf \{ f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \} = 0.$$

$$\text{ονότε } \sup_{\delta > 0} \inf \{ f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \} = 0 \Rightarrow \liminf_{x \rightarrow y} f(x) = 0$$

$$\text{Ομοια } \sup \{ f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \} = 1 \quad \text{ονότε}$$

$$\inf_{\delta > 0} \sup \{ f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \} = 1 \Rightarrow \limsup_{x \rightarrow y} f(x) = 1.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Για $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $y \in A''$ ισχύει

$$\liminf_{x \rightarrow y} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow y} f(x)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $\mu \in \mathbb{R}$ και $y \in A''$ τότε ισχύει ότι

$$(i) \limsup_{x \rightarrow y} f(x) \leq \mu \quad \text{αν και μόνο αν } (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \quad x \in B_0(y, \delta) \cap A \\ \Rightarrow f(x) \leq \mu + \varepsilon$$

$$(ii) \liminf_{x \rightarrow y} f(x) \geq \mu \quad \text{αν και μόνο αν } (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \quad x \in B_0(y, \delta) \cap A \\ \Rightarrow f(x) \geq \mu - \varepsilon$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $y \in A''$ τότε η σχέση:

$$\liminf_{x \rightarrow y} f(x) = \limsup_{x \rightarrow y} f(x) \quad \text{ισχύει αν και μόνο αν το } \lim_{x \rightarrow y} f(x) \\ \text{υπάρχει στο } \mathbb{R}^* \text{ και ισχύει:}$$

$$\limsup_{x \rightarrow y} f(x) = \liminf_{x \rightarrow y} f(x) = \lim_{x \rightarrow y} f(x)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $y \in A''$. Τότε υπάρχουν ακολουθίες $(x_n) \subseteq A \setminus \{y\}$ και $(y_n) \subseteq A \setminus \{y\}$ τέτοιες ώστε:

$$\lim_n x_n = y \quad \text{και} \quad \lim_n f(x_n) = \limsup_{x \rightarrow y} f(x) \quad \text{και}$$

$$\lim_n y_n = y \quad \text{και} \quad \lim_n f(y_n) = \liminf_{x \rightarrow y} f(x).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ τότε για κάθε $y \in A''$ ισχύει ότι:

$$\limsup_{x \rightarrow y} f(x) = \sup \Gamma_y \quad \text{και} \quad \liminf_{x \rightarrow y} f(x) = \inf \Gamma_y \quad \text{όπου}$$

$$\Gamma_y = \{x \in \mathbb{R}^* : \exists (x_n) \subseteq A \setminus \{y\} : \lim x_n = y \text{ και } \lim f(x_n) = x\}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

$$(i) \liminf_{x \rightarrow y} f(x) + \liminf_{x \rightarrow y} g(x) \leq \liminf_{x \rightarrow y} (f(x) + g(x))$$

$$(ii) \limsup_{x \rightarrow y} (f(x) + g(x)) \leq \limsup_{x \rightarrow y} f(x) + \limsup_{x \rightarrow y} g(x)$$

(με την προϋπόθεση ότι οι σημειούμενες πράξεις ορίζονται)

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $f(x) > 0$ και $g(x) > 0 \quad \forall x \in A$ και $y \in A''$ τότε

$$(i) (\liminf_{x \rightarrow y} f(x)) (\liminf_{x \rightarrow y} g(x)) \leq \liminf_{x \rightarrow y} (f(x) \cdot g(x))$$

$$(ii) \limsup_{x \rightarrow y} (f(x) \cdot g(x)) \leq (\limsup_{x \rightarrow y} f(x)) (\limsup_{x \rightarrow y} g(x))$$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΩΝ

$F(A, \mathbb{R}) \rightarrow$ το σύνολο συναρτήσεων $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

$C(A, \mathbb{R}) \rightarrow$ το σύνολο συνεχών συναρτήσεων $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

$B(A, \mathbb{R}) \rightarrow$ το σύνολο των φραγμένων συναρτήσεων $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

ΗΜΙΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $f \in F(A, \mathbb{R})$. Εάν $y \in A$ και y είναι και σημείο συσσώρευσης του A , τότε η f είναι συνεχής στο y : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A): |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ή ισοδύναμα εάν:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A): |x - y| < \delta \Rightarrow -\varepsilon \leq f(x) - f(y) \leq \varepsilon \quad \text{ή} \\ f(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(y) + \varepsilon. \quad (1)$$

(Από πρόταση) έχουμε από την (1) ότι ισχύουν ταυτόχρονα $f(x) \leq f(y) + \varepsilon$ και $f(x) \geq f(y) - \varepsilon$. Άρα αυτές είναι ισοδύναμες με τις $\limsup_{x \rightarrow y} f(x) \leq f(y)$ και $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) \geq f(y)$

Σημείωση: Εφόσον από υπόθεση έχουμε ότι $y \in A$ άρα δεν μπορεί να είναι $-\infty$ ή $+\infty$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ θα λέμε ότι η f είναι κάτω ημισυνεχής στο σημείο $y \in A$ (το οποίο είναι και σημείο συσσώρευσης του A) αν ισχύει: $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) \geq f(y)$

Ενώ θα λέμε ότι η f είναι άνω ημισυνεχής στο $y \in A$ (y σημ. συσ. του A) αν $\limsup_{x \rightarrow y} f(x) \leq f(y)$

▷ Θα λέμε ότι η $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι άνω ημισυνεχής αν είναι άνω ημισυνεχής σε όλα τα $y \in A$ και κάτω ημισυνεχής αν είναι κάτω ημ. σε όλα τα $y \in A$.

Σημείωση 1

Εφόσον $\limsup_{x \rightarrow y} (-f(x)) = -\liminf_{x \rightarrow y} f(x)$ και

$$\liminf_{x \rightarrow y} (-f(x)) = -\limsup_{x \rightarrow y} f(x)$$

Σημείωση 2

Τόσο η συνέχεια όσο και η ημισυνέχεια αναφέρονται σε σημεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. Μας απασχολούν για σημεία που είναι σημεία συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της συνάρτησης, δηλαδή εάν x_0 μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης τότε για κατάλληλα επιλεγμένο $\delta > 0$ το μοναδικό $x \in A$ με $x \in B(x_0, \delta)$ είναι το x_0 και τότε $|f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$.

• Μια συνάρτηση είναι συνεχής στο $y \in A$ (με $y \in A'$) εάν και μόνο αν είναι άνω και κάτω ημισυνεχής στο y .

Άσκηση

Έστω $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 2x & , x \in [0, 1) \\ 3 & , x = 1 \\ -2x+4 & , x \in (1, \frac{3}{2}] \\ 2x-2 & , x \in (\frac{3}{2}, 2) \\ 1 & , x = 2 \\ -2x+6 & , x \in (2, 3] \end{cases}$

Να εξεταστεί ως προς την άνω, κάτω ημισυνέχεια.

Απάντηση:

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[0, 1)$, $(1, \frac{3}{2})$, $(\frac{3}{2}, 2)$ και $(2, 3]$ οπότε σε κάθε σημείο των παραπάνω διαστημάτων είναι άνω και κάτω ημισυνεχής.

• Για το σημείο $x_0 = 1$ έχουμε

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (-2x+4) = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2.$$

Άρα $\limsup_{x \rightarrow 1} f(x) = \liminf_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ Επίσης $f(1) = 3$,

$\limsup_{x \rightarrow 1} f(x) < f(1)$ άρα η f είναι άνω ημισυνεχής στο $x_0 = 1$

• Για $x_0 = \frac{3}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} (-2x+4) = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} (2x-2) = 1$$

$f(\frac{3}{2}) = 1$ Άρα f συνεχής στο $x_0 = \frac{3}{2}$ οπότε είναι και
ανω και κάτω ημισυνεχής στο $x_0 = \frac{3}{2}$.

• Για $x_0 = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x-2) = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-2x+6) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$$

$f(2) = 1 \Rightarrow \liminf f(x) > f(2)$ άρα η f είναι κάτω
ημισυνεχής στο σημείο αυτό.

ΑΣΚΗΣΗ

$$\text{Έστω } f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

για οποιαδήποτε $y \in [0,1]$ ισχύει $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) = 0$, $\limsup_{x \rightarrow y} f(x) = 1$

Το $y \in [0,1]$ η f είναι ανω ημισυνεχής εάν

$\limsup_{x \rightarrow y} f(x) \leq f(y)$ άρα η f είναι άνω ημισυνεχής για $y \in \mathbb{Q}$
ένω είναι κάτω ημισυνεχής στο y για $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) \geq f(y)$
άρα η f είναι κάτω ημισυνεχής για $y \notin \mathbb{Q}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ τότε

(i) Η f είναι κάτω ημισυνεχής αν και μόνο αν για κάθε

$\sigma \in \mathbb{R}$ το σύνολο $K_f(\sigma) := \{x \in A : f(x) > \sigma\} = f^{-1}(\sigma, +\infty)$
είναι ανοικτό στο A .

(ii) Η f είναι ανω ημισυνεχής αν και μόνο αν για κάθε $\sigma \in \mathbb{R}$

το σύνολο $A_f(\sigma) := \{x \in A : f(x) < \sigma\} = f^{-1}(-\infty, \sigma)$ είναι
ανοικτό στο A .

Απόδειξη

(i) Έστω ότι η f είναι κάτω ημι συνεχής τότε θα είναι
έστω ημι συνεχής για κάθε $y \in A \cap A'$ αρα $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) \geq f(y)$ $\forall y \in A \cap A'$
 $\sigma \in \mathbb{R}$ και $K_f(\sigma)$ δεν είναι ανοιχτό στο A (αλλιώς θα
υπάρχει $y \in K_f(\sigma)$ κάθε σφαιρική περιοχή του y έχει
στοιχεία που δεν είναι μέσα στο $K_f(\sigma)$)

Αρα $\exists y \in K_f(\sigma) \in A : (\forall \delta > 0)(\exists x \in A) : 0 < |x - y| < \delta \Rightarrow x \notin K_f(\sigma)$
δηλαδή $\exists y \in K_f(\sigma) : (\forall \delta > 0)(\exists x \in A) : 0 < |x - y| < \delta \Rightarrow f(x) \leq \sigma$
αρα $(\forall \delta > 0) \inf \{f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A\} \leq \sigma$ και $f(y) > \sigma$
(δύο $y \in K_f(\sigma)^{(**)}$ αρα και $\sup_{\delta > 0} \inf \{f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A\} \leq \sigma$
δηλ $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) \leq \sigma < f(y)$ δηλ. $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) < f(y)$ ατονο δω (*)
Αρα $\forall \sigma \in \mathbb{R} \subset K_f(\sigma)$ είναι ανοιχτό.

Αντίστροφα : Έστω ότι για κάθε $\sigma \in \mathbb{R}$ το $K_f(\sigma)$ είναι ανοιχτό
στο A . Θ.δ.ο η f είναι κάτω ημι συνεχής.

Έστω $y \in A \cap A'$ και f δεν είναι κάτω ημι συνεχής στο y τότε
 $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) < f(y)$ οπότε υπάρχει $\sigma \in \mathbb{R}$ το $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) < \sigma < f(y)$
αλλά τότε $f(y) > \sigma \Rightarrow y \in K_f(\sigma)^{(1)}$: $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) < \sigma$

αρα $(\forall \delta > 0) \inf \{f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A\} < \sigma$ αρα
 $(\forall \delta > 0)(\exists x \in A) : 0 < |x - y| < \delta \Rightarrow f(x) < \sigma$ Αρα $y \in K_f(\sigma)$
και $\forall \delta > 0 B_0(y, \delta) \cap A \not\subset K_f(\sigma)$ Αρα το $K_f(\sigma)$ δεν είναι
ανοιχτό, ατονο από την υπόθεση. Αρα η f είναι κάτω
ημι συνεχής σε κάθε $y \in A \cap A'$

(ii) Έστω f άνω ημι συνεχής τότε θα είναι άνω ημ. σε κάθε
 $y \in A \cap A'$ και $\limsup_{x \rightarrow y} f(x) \leq f(y)$ οπότε η $(-f)$ θα είναι
κάτω ημι συνεχής στο $y \in A \cap A'$ αρα από (i) θα ισχύει αν $\forall \sigma \in \mathbb{R}$
 $K_{-f}(\sigma) = \{x \in A : -f(x) > -\sigma\} = \{x \in A : f(x) < \sigma\} = A_f(\sigma)$ είναι ανοιχτό
στο A .

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΕΙΣ

- Εάν $\{A_i : i \in I\}$ είναι μια οικογένεια ανοικτών συνόλων τότε $\bigcup_{i \in I} A_i$ είναι ανοικτό
- Έστω $A_1, A_2, \dots, A_k$ ανοικτά σύνολα τότε και $\bigcap_{i=1}^k A_i$ είναι ανοικτό σύνολο.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εάν $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ και f, g κάτω (ή άνω) ημισυνεχείς τότε και οι συναρτήσεις : $f \wedge g$, $f \vee g$, $f + g$, af όπου $a > 0$ όπου $f \wedge g(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, $f \vee g(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ είναι κάτω (ή αντιστοίχα άνω) ημισυνεχείς.